By CPHO-S. All rights reserved.

第 7 届 CPHO-S 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

命题人：陈浩楠 徐国玮 杨汝嘉 任雨奇
刘子睿 罗民睿 孙烨皓 侯宗岳
审题人：王梓人 蔡一在 李忆唐 黄文杰
胡宸源 蒋弘杰 朱信霖 甄林睿
蒋振扬 严志豪 罗钰涵 李瀚奕

一、（40分）

在游乐园大摆锤项目中，游客坐在圆形的座舱里。在座舱自转的同时，悬挂座舱的主轴在电机的驱动下做周期性摆动，使置身其上的游客有惊心动魄的体验。

如图1.1所示，大摆锤由三部分构成：第一部分是支撑体，可视为密度为ρ_1，半径为r，高度为l的匀质圆柱体；第二部分是座舱，可视为密度为ρ_2，半径为R，高度为h的匀质圆柱体，上底面紧贴支撑体下底面，与中心轴，亦即支撑体的对称轴垂直；第三部分是$N(N>2)$名游客，可视为N个质量为m_0的质点，均匀分布在座舱的上表面圆形的边缘。

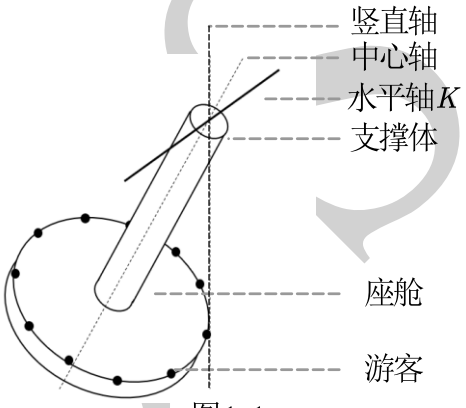


图1.1

大摆锤运动时，水平轴K始终在支撑体上表面内并穿过圆心。大摆锤整体可视作一个可以绕中心轴自转的刚体，其同时还可以绕K轴转动，运动过程中大摆锤中心轴始终垂直于K。重力加速度为g。

（1）求大摆锤满员时绕中心轴的转动惯量I_1。

（2）在（1）的基础上，不考虑座舱自转和一切可能的阻力，求大摆锤在平衡位置附近的小振动周期。

（3）讨论大摆锤处于未满员状态时运行的稳定性，假设座舱上相较满员时缺少一名游客。为减少对摆锤机械的耗损，空缺游客所在直径与摆动平面平行。大摆锤处于无动力且静止悬挂的状态时，出于安全要求，摆锤中心轴与竖直方向的夹角不得大于ξ_0，故在大摆锤座舱下底面中心位置需要添加一个可视为质点的配重。计算该质量的最小值M_0，并讨论其存在性。

你可能会用到以下公式：

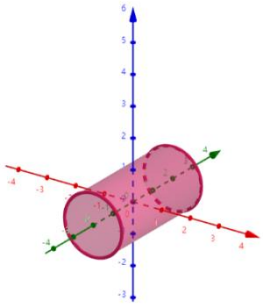
$$\sum_{i=0}^{N-1}\cos^2\left(\frac{i}{N}2\pi+\phi\right)=\sum_{i=0}^{N-1}\sin^2\left(\frac{i}{N}2\pi+\phi\right)=\frac{N}{2},N>2 \tag{1.1}$$

解：（1）将每部分的转动惯量相加得到：

$$I_1=\frac{1}{2}\pi\rho_1 l r^4+\frac{1}{2}\pi\rho_2 h R^4+Nm_0R^2 \tag{1}$$

（2）先求一根圆柱的转动惯量：

By CPHO-S. All rights reserved.



$$\sum m_i(z^2+y^2)=\frac{1}{2}\rho_1\pi l r^4 \tag{2}$$

$$\sum m_i x^2=\frac{1}{12}\rho_1\pi r^2 l^3 \tag{3}$$

由对称性

$$I=\sum m_i(x^2+z^2)=\frac{1}{12}\rho_1\pi r^2 l^3+\frac{1}{4}\rho_1\pi l r^4 \tag{4}$$

据此，主轴+座舱+人转动惯量：

$$I_2=\rho_1\pi r^2 l\left(\frac{1}{3}l^2+\frac{1}{4}r^2\right)+\rho_2\pi R^2 h\left(\frac{1}{3}h^2+\frac{1}{4}R^2+l^2+lh\right)+Nm_0l^2+m_0R^2\sum_{i=0}^{N-1}\cos^2\left(\frac{i}{N}2\pi+\phi\right) \tag{5}$$

根据所给公式：

$$\sum_{i=0}^{N-1}\cos^2\left(\frac{i}{N}2\pi+\phi\right)=\sum_{i=0}^{N-1}\sin^2\left(\frac{i}{N}2\pi+\phi\right)=\frac{N}{2} \tag{6}$$

化简得：

$$I_2=\rho_1\pi r^2 l\left(\frac{1}{3}l^2+\frac{1}{4}r^2\right)+\rho_2\pi R^2 h\left(\frac{1}{3}h^2+\frac{1}{4}R^2+l^2+lh\right)+Nm_0l^2+\frac{N}{2}m_0R^2 \tag{7}$$

质心位置：

$$y_c=\frac{\rho_1\pi r^2 l\frac{l}{2}+\rho_2\pi R^2 h\left(\frac{h}{2}+l\right)+Nm_0l}{\rho_1\pi r^2 l+\rho_2\pi R^2 h+Nm_0} \tag{8}$$

近似到二阶小量的能量为：

$$E=\frac{1}{2}(\rho_1\pi r^2 l+\rho_2\pi R^2 h+Nm_0)gy_c\theta^2+\frac{1}{2}(I_2)\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

由此得到振动周期为：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\rho_1\pi r^2 l\left(\frac{1}{3}l^2+\frac{1}{4}r^2\right)+\rho_2\pi R^2 h\left(\frac{1}{3}h^2+\frac{1}{4}R^2+l^2+lh\right)+Nm_0l^2+\frac{N}{2}m_0R^2}{g\left(\rho_1\pi r^2 l\frac{l}{2}+\rho_2\pi R^2 h\left(\frac{h}{2}+l\right)+Nm_0l\right)}} \tag{10}$$

（3）我们认为加入一位质量为$-m_0$的游客。

$$m_{总}=(\rho_1\pi r^2 l+\rho_2\pi R^2 h+Nm_0) \tag{11}$$

质心位置变为：

$$x_c'=\frac{m_0R}{m_{总}-m_0+M} \tag{12}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

$$y_c' = \frac{y_c m_{总} - m_0 l + M(l+h)}{m_{总} - m_0 + M} \tag{13}$$

平衡时临界：

$$\tan\xi_0 = \frac{x_c'}{y_c'} \tag{14}$$

化简得：

$$M = \frac{m_0 R\cot\xi_0 + m_0 l - m_{总} y_c}{l+h} = \frac{m_0 R\cot\xi_0 + m_0 l - \rho_1\pi r^2 l\frac{l}{2} - \rho_2\pi R^2 h\left(\frac{h}{2}+l\right) - N m_0 l}{l+h} \tag{15}$$

只有当$M>0$时才需要添加配重。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 3 分，（1）式 3 分；

第（2）问 22 分，（2）（3）（4）式各 2 分，（5）式 6 分，其中每个转动惯量各 2 分，（7）（8）（9）式各 2 分，（10）式 4 分；

第（3）问 15 分，（11）式 3 分，（12）（13）式各 2 分，（14）（15）式各 3 分，讨论 2 分。

二、（40分）

悠悠球是一种常见的玩具，可简化为如下模型：一个半径为r_1，质量为m_1的匀质圆柱，在其两侧底面分别同轴地固定连接一个半径为$r_2(r_2>r_1)$，质量为m_2的匀质圆柱，将一根总长为L的不可伸长轻软细绳的一端固定在中心圆柱侧面A点处，A在中心圆柱的垂直平分面上。

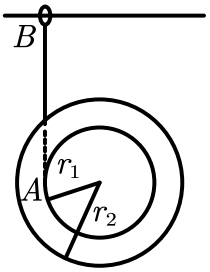


图2.1

如图2.1所示，现将轻绳缠绕在中心圆柱上，另一端固定在一轻质小环B上，轻环可以在一水平固定且足够长的光滑细杆上运动。静止释放悠悠球，悠悠球将做平面平行运动。

设释放时悠悠球质心与杆所在高度之差为h_0，悠悠球总质量$m_1+2m_2=M$，绕中轴转动惯量$\frac{1}{2}m_1r_1^2+m_2r_2^2=I$。重力加速度取$g=9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，其余各参量如下：

$$m_1=20\ \mathrm{g}，\ m_2=100\ \mathrm{g}，\ r_1=2\ \mathrm{cm}，\ r_2=4\ \mathrm{cm}，$$
$$L=1\ \mathrm{m}，\ h_0=0.5\ \mathrm{m}，\ I_1=0.5\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

本题各小问结果均保留四位有效数字。

（1）计算悠悠球上缠绕的绳子恰好完全展开时悠悠球角速度Ω的值。

（2）为使悠悠球能够快速上升，当悠悠球上缠绕的绳子恰好完全展开时，在B点处通过外部作用快速对绳子施加一竖直方向冲量I_1。施加冲量后悠悠球质心速度方向由竖直向下变为竖直向上，计算此时悠悠球质心的速度大小v_1及悠悠球绕质心转动的角速度大小ω_1的值。

（3）经历了（2）中的过程后，悠悠球拥有向上的速度，绳将松弛，经过一段时间后，绳将重新绷紧，计算绳自松弛至绷紧这一过程历经时间t的值。

（4）在（3）的基础上，以施加冲量时悠悠球质心所在高度为零点，数值计算悠悠球质心能够上升的最大高度h_{max}。

解：（1）悠悠球质心速度$v(x)$与其自转角速度$\omega(x)$之间满足关系

$$v(x)=\omega(x)r_1 \tag{1}$$

下落过程中悠悠球能量守恒

$$Mg(x-h_0)=\frac{1}{2}Mv(x)^2+\frac{1}{2}I\omega(x)^2 \tag{2}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

解得角速度

$$\omega(x)=\sqrt{\frac{2Mg(x-h_0)}{Mr_1^2+I}}$$

$$=\sqrt{\frac{4(m_1+2m_2)g(x-h_0)}{3m_1r_1^2+4m_2r_1^2+2m_2r_2^2}} \tag{3}$$

绳子恰好完全张开时，$x=L$，此时的角速度为

$$\Omega=\sqrt{\frac{4(m_1+2m_2)g(L-h_0)}{3m_1r_1^2+4m_2r_1^2+2m_2r_2^2}} \tag{4}$$

代入数值得到

$$\Omega=92.47\ \mathrm{s^{-1}} \tag{5}$$

（2）绳子恰好完全展开时，悠悠球质心速度

$$V=\Omega r_1 \tag{6}$$

设施加冲量后，悠悠球质心速度为v_1，绕质心旋转角速度为ω_1。

竖直方向上列冲量定理方程

$$I_1=M(V+v_1) \tag{7}$$

以悠悠球轴线为轴列角动量定理方程

$$I_1r_1=I(\omega_1-\Omega) \tag{8}$$

解得

$$v_1=\frac{I_1}{m_1+2m_2}-\sqrt{\frac{4(m_1+2m_2)gr_1^2(L-h_0)}{3m_1r_1^2+4m_2r_1^2+2m_2r_2^2}} \tag{9}$$

$$\omega_1=\frac{2I_1r_1}{m_1r_1^2+2m_2r_2^2}+\sqrt{\frac{4(m_1+2m_2)g(L-h_0)}{3m_1r_1^2+4m_2r_1^2+2m_2r_2^2}} \tag{10}$$

代入数值得到

$$v_1=0.4228\ \mathrm{m/s} \tag{11}$$

$$\omega_1=153.5\ \mathrm{s^{-1}} \tag{12}$$

（3）环B将会在轻杆上向右移动$2r_1$的距离。由于绳和环均无质量，不妨认为环B将始终在A点正上方。

环B移动过程用时

$$t_0=\frac{\pi}{\omega_1} \tag{13}$$

以施加冲量后一瞬间为时间零点，悠悠球上升高度随时间变化关系

$$h(t)=v_1t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{14}$$

悠悠球上缠绕的绳长随时间变化关系

$$l(t)=\omega_1r_1(t-t_0)=(\omega_1t-\pi)r_1 \tag{15}$$

经过一段时间后，绳子将会绷紧。当绳子绷紧时，满足方程

$$h(t)=l(t) \tag{16}$$

解得此时的时间为

$$t=\frac{-(\omega_1r_1-v_1)+\sqrt{(\omega_1r_1-v_1)^2+2\pi gr_1}}{g} \tag{17}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

代入数值得到

$$t = 0.02278\ \mathrm{s} \tag{18}$$

（4）绳子绷紧时，悠悠球质心的速度

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 - gt \\ &= \omega_1 r_1 - \sqrt{(\omega_1 r_1 - v_1)^2 + 2\pi g r_1} \end{aligned} \tag{19}$$

从悠悠球开始上升到此时刻上升的高度为

$$h_1 = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.0071\ \mathrm{m} \tag{20}$$

绳绷直后，设悠悠球质心速度为v_3，角速度为ω_3，则有$v_3 = \omega_3 r_1$，由角动量定理

$$M v_2 r_1 + I\omega_1 = I\omega_3 + M v_3 r_1 \tag{21}$$

解得

$$v_3 = \frac{M v_2 r_1 + I\omega_1}{\frac{I}{r_1} + M r_1} \tag{22}$$

此后上升过程受力情况与（1）相同，质心加速度也应于（1）中下降过程加速度相同，即

$$a = \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v(x)^2}{2\mathrm{d}x} = \frac{2(m_1 + 2m_2) r_1^2}{3m_1 r_1^2 + 4m_2 r_1^2 + 2m_2 r_2^2} g \tag{23}$$

绳子绷直后再上升高度

$$h_2 = \frac{v_3^2}{2a} = 0.6244\ \mathrm{m} \tag{24}$$

上升的最大高度

$$h_{max} = h_1 + h_2 = 0.6315\ \mathrm{m} \tag{25}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1）问 9 分：（1）式 1 分，（2）（3）（4）（5）式各 2 分；
第（2）问 9 分：（6）（7）（8）（9）（10）式各 1 分，（11）（12）式各 2 分；
第（3）问 8 分：（13）（14）（16）（17）式各 1 分，（15）（18）式各 2 分；
第（4）问 14 分：（22）式 1 分，（19）（20）（21）（24）（25）式各 2 分，（23）3 分。

三、（40分）

在生产生活中，人们为了正确使用机器并充分发挥其效率，需要测量一些部件的转速。而其中有一类测量转速的电表为磁性转速表，其主要原理是电磁驱动。电磁驱动可以通过如下模型理解：

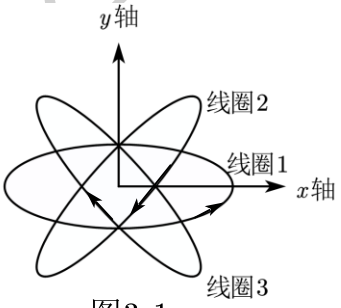


图3.1

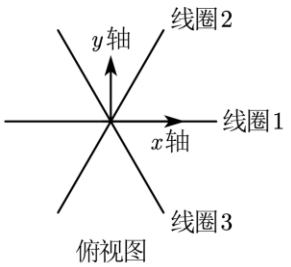


图3.2

（1）如图3.1所示建立空间直角坐标系。三个匝数为N，半径为R的相同圆形线圈的圆心固定在原点处，线圈平面两两夹角均为60°，分别通有电流

By CPHO-S. All rights reserved.

$$I_1 = I_0\cos(\omega_0 t)，\ I_2 = I_0\cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)，\ I_3 = I_0\cos\left(\omega_0 t + \frac{4\pi}{3}\right),$$

不考虑相对论效应等高阶电磁感应，求t时刻原点处的磁感应强度$\vec{B}(t)$。

（2）在（1）的基础上，将一根圆柱形匀质金属棒的中心固定在原点，其轴线在$x0y$平面内，可绕z轴转动，角速度正方向为z轴正向。金属棒由很多个彼此绝缘的半径为$a \ll R$的薄圆盘同轴粘合而成，总长度为$l \ll R$，质量为m，电导率为σ，磁导率为真空磁导率为μ_0，忽略重力。某时刻，磁感应强度与金属棒轴线的夹角为θ，金属棒的角速度为ω，求此时金属棒受到的磁力矩$\vec{\tau}$及焦耳热功率P_1。

（3）忽略可能存在的阻尼，计算稳定状态下金属棒的角速度ω_f。

提示：磁力矩可以通过如下方式计算：

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{3.1}$$

其中$\vec{\mu}$为磁矩，其大小由电流强度I和回路面积S决定，其定义式为：

$$\vec{\mu} = I\vec{S} \tag{3.2}$$

解：（1）三个线圈各自产生的磁感应强度为：

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_0 N}{2R}\cos(\omega_0 t)\hat{y} \tag{1}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_0 N}{2R}\cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right) \tag{2}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_0 N}{2R}\cos\left(\omega_0 t + \frac{4\pi}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right) \tag{3}$$

叠加有：

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \tag{4}$$

化简得：

$$\vec{B} = \frac{3\mu_0 I_0 N}{4R}(-\sin\omega_0 t\,\hat{x} + \cos\omega_0 t\,\hat{y}) \tag{5}$$

（2）由于忽略高阶电磁感应，因此取金属棒静止的参考系，有：

$$B = \frac{3\mu_0 I_0 N}{4R}$$

$$\left|\dot{\vec{B}}\right| = B(\omega_0 - \omega) \tag{6}$$

即磁感应强度只有方向改变。

由于金属棒由很多个彼此绝缘的薄圆盘组成，$\dot{\vec{B}}$垂直金属棒轴线的分量产生的涡流可以忽略，从而对τ、P_1无贡献。

考虑$\dot{\vec{B}}$平行轴线的分量，设感生电场为$E(r)$，其中r为到轴线的距离。由法拉第电磁感应定律：

$$E(r)\cdot 2\pi r = \pi r^2\left|\dot{\vec{B}}\right|\sin\theta$$

即：

$$E(r) = \frac{1}{2}B(\omega_0 - \omega)\sin\theta\cdot r \tag{7}$$

电流密度为：

$$j(r) = \sigma E(r) = \frac{1}{2}\sigma B(\omega_0 - \omega)\sin\theta\cdot r \tag{8}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

总磁矩为：

$$\mu=\int_0^a\frac{1}{2}\sigma B(\omega_0-\omega)\sin\theta\cdot r\cdot\pi r^2\cdot l\mathrm{d}r=\frac{1}{8}\pi a^4l\sigma B(\omega_0-\omega)\sin\theta \tag{9}$$

从而，磁力矩为：

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}=\frac{1}{8}\pi a^4l\sigma\left(\frac{3\mu_0I_0N}{4R}\right)^2(\omega_0-\omega)\sin^2\theta\hat{z} \tag{10}$$

焦耳热功率密度为：

$$p=\sigma E^2=\frac{1}{4}\sigma\left(\frac{3\mu_0I_0N}{4R}\right)^2(\omega_0-\omega)^2\sin^2\theta\cdot r^2 \tag{11}$$

积分得总功率：

$$P_1=\int_0^a\frac{1}{4}\sigma\left(\frac{3\mu_0I_0N}{4R}\right)^2(\omega_0-\omega)^2\sin^2\theta\cdot r^2\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r$$

即：

$$P_1=\frac{1}{8}\pi a^4l\sigma\left(\frac{3\mu_0I_0N}{4R}\right)^2(\omega_0-\omega)^2\sin^2\theta \tag{12}$$

可见：

$$P_1=\tau(\omega_0-\omega)$$

（3）由角动量定理：

$$J\dot{\omega}=\tau$$

当稳定时：

$$\dot{\omega}=0$$

即：

$$\tau=\frac{1}{8}\pi a^4l\sigma\left(\frac{3\mu_0I_0N}{4R}\right)^2(\omega_0-\omega)\sin^2\theta=0 \tag{13}$$

从而有：

$$\omega_f=\omega_0 \tag{14}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1）问共 12 分：（1）（2）（3）（4）每式 2 分，（5）式 4 分；
第（2）问共 22 分：（8）（9）（11）每式 2 分，（6）（7）（10）（12）每式 4 分；
第（3）问共 6 分：（13）（14）每式 3 分。

四、（40分）

一个理想的薄凸透镜的成像规律可由高斯成像公式描述，即

$$\frac{f}{u}+\frac{f'}{v}=1,\qquad f,f'>0 \tag{4.1}$$

其中u为物距，v为像距，f为物方焦距，f'为像方焦距。

事实上，关于透镜成像规律，还有一种与之等价的牛顿成像公式。本题介绍牛顿成像公式，并利用其分析主光轴上正椭圆的成像规律。注意：本题中的物可能是实物、虚物或由二者组合而成，所成的像同理。为简单起见，在本题的求解过程中不必探讨其中的区别。

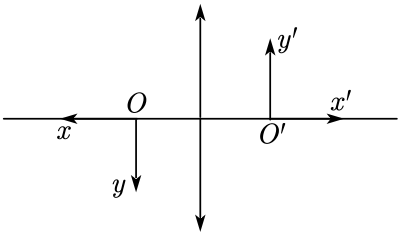


图4.1

（1）引入$x=u-f$，$x'=v-f'$，分别代表物、像到物方、像方焦平面的距离。试消去u，v，化简得到描述x'和x关系的牛顿成像公式，并计算用x'表示的横向放大率m。

By CPHO-S. All rights reserved.

（2）考虑图4.1所示平面内的成像。 同（1），透镜物方焦距为f，像方焦距为f'。

如图4.1所示，建立平面直角坐标系xOy与$x'O'y'$，其中O和O'分别为图中透镜的物方焦点和像方焦点。

设物为xOy系中中心在x轴上的正椭圆，由以下方程确定：

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0) \tag{4.2}$$

（2.1）在$x'O'y'$坐标系中给出像满足的方程，并指出像何时为圆。

（2.2）作为（2.1）的特殊情况，令$b=a$， $f'=f$。求满足条件的x_0，使得物和像关于薄透镜所在平面对称。

（3）接（2）问，令$f'=f=a$，$x_0=2a$，$b=\frac{a}{\sqrt{3}}$，在像方空间$x'=d$处共轴放置一面凹面反射镜，其曲率半径为r。仅考虑傍轴成像情形，试求符合要求的d，使得物经凸透镜折射，再经凹面镜反射，最后经凸透镜再次折射后，所成的像与物相同且完全重合。

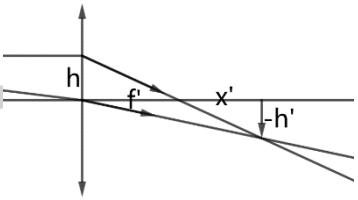
解：（1）将$u=x+f$，$v=x'+f'$代入高斯成像公式得到

$$\frac{f}{f+x}+\frac{f'}{f'+x'}=1 \tag{1}$$

去分母，化简得到

$$xx'=ff'\text{（或}x'=\frac{ff'}{x}\text{）} \tag{2}$$

如图，利用特殊光线计算横向放大率m。



横向放大率

$$m=\frac{h'}{h}$$

由图中相似关系

$$\frac{-h'}{h}=\frac{x'}{f'} \tag{3}$$

处理得到

$$m=-\frac{x'}{f'} \tag{4}$$

（2）（2.1）对图示的坐标系，x和x'可直接套用（2）式，而$y'=-m\cdot y$，反解出x和y：

$$x=\frac{ff'}{x'},y=\frac{f'}{x'}\cdot y' \tag{5}$$

代入物的方程，化简得到

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)\cdot(x')^2-\frac{2x_0ff'}{a^2}\cdot x'+\left(\frac{ff'}{a}\right)^2+\left(\frac{f'y'}{b}\right)^2=0 \tag{6}$$

为像满足的方程。

要求成像为圆，必有

$$\frac{x_0^2}{a^2}-1=\frac{f'^2}{b^2} \tag{7}$$

解得

$$x_0=\pm a\sqrt{1+\frac{f'^2}{b^2}} \tag{8}$$

在（6）中代入x_0，得到圆的方程为

By CPHO-S. All rights reserved.

$$\left(x' \mp \frac{fb\sqrt{f'^2+b^2}}{f'a}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{fb^2}{f'a}\right)^2 \tag{9}$$

（2.2）令$b=a$，$f'=f$后，物为圆形。因此像必为圆形。必有

$$x_0 = \pm a\sqrt{1+\frac{f'^2}{b^2}} = \pm\sqrt{f^2+a^2}$$

此时物的方程：

$$\left(x \mp \sqrt{f^2+a^2}\right)^2 + y^2 = a^2 \tag{10}$$

像的方程：

$$\left(x' \mp \sqrt{f^2+a^2}\right)^2 + y'^2 = a^2 \tag{11}$$

两个圆的半径相等，且圆心位置关于透镜镜面对称。则

$$x_0 = \pm\sqrt{f^2+a^2} \tag{12}$$

为所求。

（3）由物象共轭性，将最终成的像再经透镜成像过去，可以得到经凹面镜反射成的像。不难判断，第一次成的像再经凹面镜成像后与自身重合。第一（二）次成的像的方程：

$$\left(x' - \frac{2a}{3}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 \tag{13}$$

为圆心$\left(\frac{2a}{3},0\right)$，半径$\frac{a}{3}$的圆。

凹面镜成像公式、横向放大率公式（物距、像距均以凹面镜左侧为正）

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{2}{r}, m=-\frac{v}{u} \tag{14.a}$$

考虑凸透镜成像规律（设物方、像方焦距均为f_0）

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f_0}, m=-\frac{v}{u} \tag{14.b}$$

可见两式同构。其物理含义为，将凹面镜反射成的像沿凹面镜对称过去而得到的像，与将凹面镜替换成焦距$\frac{r}{2}$的凸透镜直接成的像完全相同。

令

$$f_0 = \frac{r}{2} \tag{14.c}$$

则可以将“求d使$x'O'y'$系中圆心$\left(\frac{2a}{3},0\right)$，半径$\frac{a}{3}$的圆经$x'=d$处凹面镜成像后物像重合”的问题，转化为“求$x_0$使$xOy$系中圆心$(x_0,0)$，半径$\frac{a}{3}$的圆经题文前述的薄凸透镜成像后，物像关于透镜对称”的问题，其中x_0满足：

$$\frac{2a}{3} + x_0 + f_0 = d \tag{15}$$

因此，套用（2.2）中得到的结果即可（替a为$\frac{a}{3}$，f为f_0）

By CPHO-S. All rights reserved.

$$x_0 = \pm\sqrt{f_0^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} \tag{16}$$

代入（14.c）（15）式，得到

$$d = \frac{r}{2} + \frac{2a}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} \tag{17}$$

显然两个解均满足凹面镜的位置在像方空间。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 4 分：（1）（2）（3）（4）各 1 分；

第（2）问 20 分：（5）（7）（8）（10）（11）（12）各 2 分，（6）（9）4 分；

第（3）问 16 分：（13）2 分，（15）（16）（17）各 3 分，（14）及类比思想的叙述 5 分。（若直接计算，结果正确亦可得全分）

所有得分点，若漏±号或绝对值，每两处扣 1 分（不满两处扣 1 分）。

五、（40 分）

在实际的电路问题中，噪声被定义为所测所需信号之外的电磁干扰，它会导致电流或电压的无规则波动。在绝对零度附近，经典理论导致的噪声趋于零，此时起主要作用的是电流和电压间不确定性关系造成的量子噪声。在以下问题中，如连用不等式，只要放缩合理，你无需担心等号能否可以同时取得。

（1）考虑一个简单的谐振子系统。轻弹簧的一端固定在墙上，另一端固定一物块。弹簧的劲度系数为k，物块质量为m，约化普朗克常数为$\hbar$。考虑一维量子情形，物块的位移x和动量p_x满足不确定关系

$$\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p_x)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{5.1}$$

其中

$$\overline{(\Delta Y)^2} = \overline{(Y - \bar{Y})^2}_t \tag{5.2}$$

为物理量Y的量子方差，其对于经典物理情形仍适用，且式(5.2)中的平均是相对时间而言的。

由于不确定关系，谐振子系统的最小能量将为一个非零值E_0，称其为系统的零点能。计算弹簧谐振子系统的零点能E_0。

（2）考虑一个仅由电容、电感组成的谐振电路，电容大小为C，电感大小为L。已知电容带电量Q和电感磁通ϕ满足与（1）小问中类似的不确定关系，即

$$\overline{(\Delta Q)^2} \cdot \overline{(\Delta \phi)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{5.3}$$

试计算该系统的零点能E_1。

（3）在（2）中的谐振电路中，考虑电容是约瑟夫森结的情况。超导量子比特的唯象模型指出，当这种电容器两极板距离很小时，由于电子隧穿将产生等效漏电电流，其大小i满足

$$\begin{cases} i(t) = I_c \sin\theta(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{e}{\hbar}V(t) \end{cases}, \theta(0) = 0, i(0) = 0 \tag{5.4}$$

其中I_c为临界电流。

（3.1）考虑全回路基尔霍夫定律，计算电感磁通ϕ与θ的关系。

（3.2）隧穿电流通过电容内部这一过程中，电子从低电势处到达了高电势处，电容对外做功，从而使电容能量具有一大于零的附加项。计算谐振体系因隧穿效应额外具有的能量E_2，

By CPHO-S. All rights reserved.

用$\phi, e, I_c, \hbar$表示。

（4）接（3），当两极板距离很小时，$\theta \ll 1$。此时电容带电量Q和电感磁通ϕ也满足与（1）小问中类似的不确定关系，计算考虑隧穿效应后，该谐振电路的零点能E_3，保留至考虑隧穿效应修正后的首阶非零项即可。

（5）根据普朗克理论，频率为ν的谐振子平均能量为

$$\overline{E} = \frac{2h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{5.5}$$

频率在ν到$\nu + \delta\nu$之间的热辐射功率为

$$P_0 = \frac{2h\nu\delta\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{5.6}$$

试类比$\overline{E}$和P_0的关系，根据（2）（4）小问中零点能的形式，直接写出频率在ν到$\nu + \delta\nu$之间的量子噪声的热辐射功率P_1。并在室温$T = 300$ K的条件下，讨论频率满足何种条件时，量子噪声的热辐射功率与普朗克理论中热辐射功率相当，此时量子噪声将不可忽略。

（1）我们可以轻松地写出谐振子的体系能量（注意：必须写成位移和动量的函数，而不是位移和速度的函数。）

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p_x^2}{2m} \tag{1}$$

考虑到零点能是x,p_x的平均值都为 0 时，那么

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2 - 2x\bar{x} + \overline{x^2}} = \overline{x^2} \tag{2}$$

同理可得

$$\overline{(\Delta p_x)^2} = \overline{p_x^2}, \tag{3}$$

那么运用基本不等式可得

$$E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{4}$$

其中$\omega^2 = \frac{k}{m}$

那么

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{5}$$

（2）考虑 LC 串联电路的系统能量

$$E = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\phi^2}{2L} \tag{6}$$

继续运用不确定关系

$$\overline{(\Delta\phi)^2(\Delta Q)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{7}$$

并且由第（1）问知，零点能是在物理量平均值为零的情况下取得，那么

$$\overline{(\Delta\phi)^2} = \overline{\phi^2}, \tag{8}$$

$$\overline{(\Delta Q)^2} = \overline{Q^2}, \tag{9}$$

继续运用基本不等式可得

$$E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_1 \tag{10}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

其中$\omega_1^2 = \frac{1}{LC}$

那么

$$E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega_1 \tag{11}$$

（3）（3.1）由题意可知

$$\mathrm{d}\theta = \frac{-eV\mathrm{d}t}{\hbar} \tag{12}$$

其中V为两个极板的电势差。
又由法拉第电磁感应定律可知

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -V \tag{13}$$

联立（12）（13）式可得

$$\theta = \frac{e\phi}{\hbar} \tag{14}$$

（3.2）电容耦合能可以通过电流通过电容做功来描述，结合题目给出的唯像公式，那么

$$\mathrm{d}E_2 = -IV\mathrm{d}t = -I_c V\sin\theta\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

将（12）式带入（15）式，并积分得到

$$E_2 = \frac{\hbar I_c}{e}\left(1-\cos\frac{e\phi}{\hbar}\right) \tag{16}$$

（4）将（16）式展开，并保留到二阶小量，整理得

$$E_2 = \frac{\hbar I_c}{2e}\theta^2 = \frac{eI_c\phi^2}{2\hbar} \tag{17}$$

又有在不考虑电容耦合能的情况下，LC串联电路的能量可以被写成:

$$E = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\phi^2}{2L} \tag{18}$$

考虑电容耦合能后，体系能量可以被写作

$$E' = E + E_2 = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\phi^2}{2L_{eff}} \tag{19}$$

其中有

$$\frac{1}{L_{eff}} = \frac{1}{L} + \frac{I_c e}{\hbar} \tag{20}$$

那么重复第（2）问中的操作，得到

$$E_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eff} \tag{21}$$

其中$\omega_{eff}^2 = \frac{1}{L_{eff}C}$

（5）易得量子噪声的热功率

$$P_1 = \frac{1}{2}\hbar\nu\mathrm{d}\nu \tag{22}$$

利用数值计算后易得，当

$$\nu \approx 10^{12}\ \mathrm{Hz} \tag{23}$$

的时候，量子噪声约和热噪声一个数量级。即，在红外波段，量子噪声在电路实验中不可忽略的。

By CPHO-S. All rights reserved.

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 5 分：（1）式 2 分，（2）或（3）式 1 分，（4）或（5）式 2 分；

第（2）问 5 分：（6）式 2 分，（7）式 1 分，（8）（9）任写一个 1 分，（10）（11）式任写一个 1 分；

第（3）问 15 分：

第（3.1）小问 9 分：（12）（13）（14）式各 3 分；

第（3.2）小问 6 分：（15）（16）式各 3 分；

第（4）问 10 分：（17）（18）（19）（20）（21）式各 2 分；

第（5）问 5 分：（22）式 3 分，（23）式或等价描述 2 分。

六、（40 分）

在讨论薄膜干涉时，我们需要计算一束平行光入射到一均匀薄膜上的总振幅反射率和总振幅透射率，通常采取的方法是对多次反射、透射的光分别计算振幅和相位，合成后计算总的振幅反射率和振幅透射率。本题旨在启发考生用一种新的方法，从另一角度推导出薄膜的总振幅反射率和总振幅透射率，并在一个例子中加以应用。

如图6.1所示，一束光从介质1入射到介质2时，其振幅反射率和透射率分别为r_{12}和t_{12}；从介质2入射到介质1时，其振幅反射率和透射率分别为r_{21}和t_{21}。由于光路可逆，将图6.1中的反射光和透射光反向地射回介质面，如图6.2、图6.3所示，应得到反向射出的入射光。基于此，有如下的斯托克斯倒逆关系：

$$r_{12}+r_{21}=0 \tag{6.1}$$

$$r_{12}^2+t_{12}t_{21}=1 \tag{6.2}$$

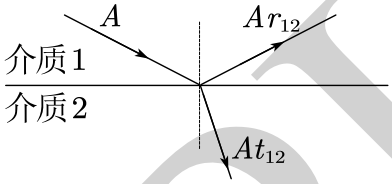


图6.1

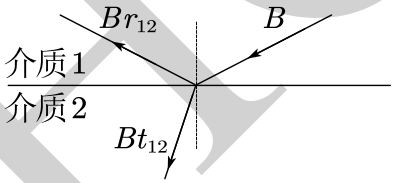


图6.2

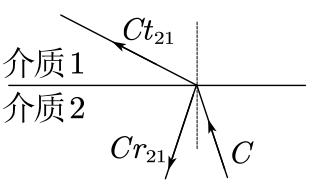


图6.3

注意：本题所有有关振幅的讨论均是指复振幅。

（1）实际上，一个复杂的体系可以视作多个简单体系的叠加。如图6.4所示，两束光G和F分别从介质1和介质2入射到分界面，入射光振幅分别为G和F，得到两束出射光，出射光的振幅分别为D和E。试着写出图6.4体系中振幅D,E的表达式，用F,G及$r_{12},r_{21},t_{12},t_{21}$表示。

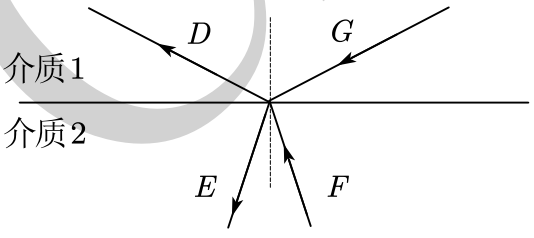


图6.4

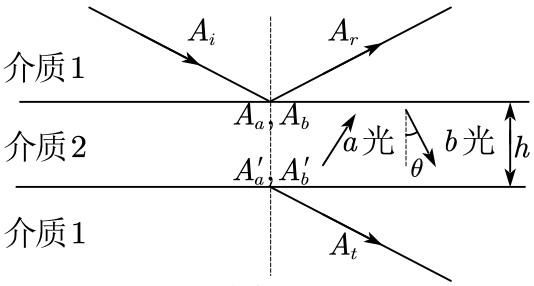


图6.5

（2）一束真空波长为λ的光入射到一薄膜上，经过多重反射、透射后各光分量振幅如图6.5所示。已知光从介质i入射到介质j时振幅反射率和透射率分别为r_{ij}和t_{ij}，分别写出在薄膜上下两个界面处各个光振幅满足的方程，结果用$r_{12},r_{21},t_{12},t_{21},A_i,A_t,A_r$及介质2中$a,b$光在上下界面处的振幅$A_a,A_b,A'_a,A'_b$表示。

By CPHO-S. All rights reserved.

（3）已知薄膜折射率为n_2，厚度为h，记$\delta=\frac{4\pi n_2 h\cos\theta}{\lambda}$，用$\delta$表示$A_a,A_a'$与$A_b,A_b'$间满足的关系式，并解出总的振幅透射率$T$和振幅反射率$R$。

（4）如图6.6为一个杨氏双缝干涉装置，缝距为d，双缝到光屏的距离为L，装置整体放在折射率为n_1的环境中，在单缝处放有一块偏振片，透振方向与缝平行。在双缝的一条缝后放置一个厚度为h，折射率为n_2的薄膜，膜的表面与缝平行，且$\frac{d}{L}\ll 1$，以至于可认为膜的法向与入射光线方向夹角始终为φ不变，试求干涉条纹的衬比度。

已知：$n_1=2,n_2=1.5,\varphi=\frac{\pi}{3},\lambda=500\ \text{nm},d=1\ \text{mm},L=1\ \text{m},h=200\ \text{nm}$，此时

$$r_{12}=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2} \tag{6.3}$$

$$t_{12}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2} \tag{6.4}$$

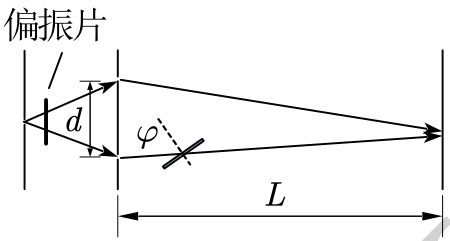


图6.6

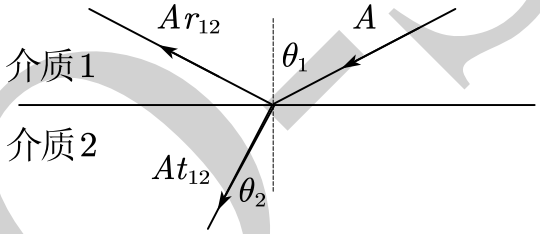
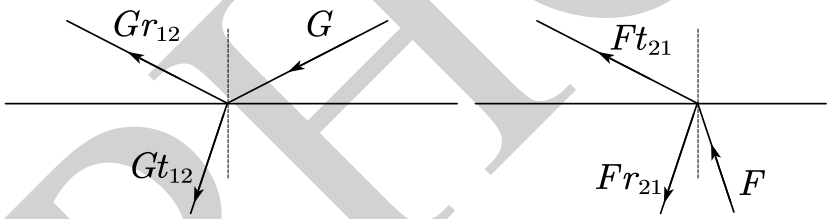


图6.7

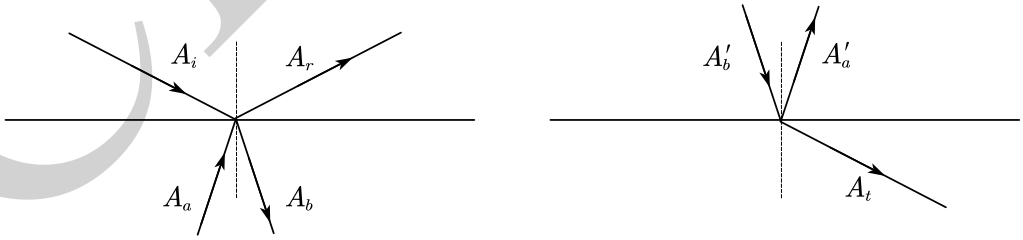
解：



（1）可以看做上图两个体系的叠加，故而：

$$Gr_{12}+Ft_{12}=D \tag{1}$$

$$Fr_{21}+Gt_{12}=E \tag{2}$$



（2）如上左图所示，有

$$A_r=A_ir_{12}+A_at_{21} \tag{3}$$

$$A_b=A_it_{12}+A_ar_{21} \tag{4}$$

如上右图所示，有

$$A_t=A_b'\cdot t_{21} \tag{5}$$

$$A_a'=A_b'\cdot r_{21} \tag{6}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

（3）由简谐平面波的复数表示得：

$$A_a = A'_a e^{i\frac{\delta}{2}} \tag{7}$$

$$A'_b = A_b e^{i\frac{\delta}{2}} \tag{8}$$

联立（3）-（8）式，得：

$$R \equiv \frac{A_r}{A_i} = \frac{r_{12} + r_{21} e^{i\delta}}{1 - {r_{21}}^2 e^{i\delta}} \tag{9}$$

$$T \equiv \frac{A_t}{A_i} = \frac{t_{12} t_{21} e^{i\frac{\delta}{2}}}{1 - {r_{21}}^2 e^{i\delta}} \tag{10}$$

（4）由折射定律：

$$n_1 \sin\varphi = n_2 \sin\theta \tag{11}$$

$$n_2 \cos\theta = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\varphi} = i\sqrt{n_1^2 \sin^2\varphi - n_2^2} \tag{12}$$

取“+”是因为“+”代表衰减的解。

记

$$\tan^{-1}\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2\varphi - n_2^2}}{n_1 \cos\varphi} = \alpha$$

$$\exp\left(-\frac{4\pi}{\lambda} h\sqrt{n_1^2 \sin^2\varphi - n_2^2}\right) = \epsilon$$

代入（16）式得：

$$|T| = \frac{4n_1\sqrt{n_1^2 \sin^2\varphi - n_2^2}\cos\varphi}{n_1^2 - n_2^2} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{(1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\cos 4\alpha)^{\frac{1}{2}}} = 0.222 \tag{13}$$

衬比度为：

$$\gamma = \frac{2|T|}{1 + |T|^2} \tag{14}$$

代入数据得：

$$\gamma = 0.42 \tag{15}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1）问 4 分，（1）（2）各 2 分；
第（2）问 8 分，（3）（4）（5）（6）各 2 分；
第（2）问 16 分，（7）（8）（9）（10）各 3 分；
第（4）问 12 分，（12）（13）（14）（15）各 3 分。

七、（80分）

【注意：请将本题第（1）（2）小问写在第七页答题卡上，第（3）小问写在第八页答题卡上】

生活当中，我们经常和各种液体打交道，最重要的例子当然就是水。一般来说我们生活的环境中相对湿度不是100%，所以始终存在液体蒸发和凝结的动态平衡。本题我们将考虑液体的蒸发及与其相关的一些热学现象。本题中，我们考虑的液体在$T = T_0$时，其饱和蒸汽压为$p_s = p_0$，此时摩尔汽化热（相变焓）为L_0，液体的密度恒定为ρ，液体的比质量热容恒定为c，单个分子质量为μ，蒸汽可以视为理想气体，其气态摩尔热容为$3R$。相对于同等物质量的气体而言，液体的体积与可压缩性总是可以忽略。

By CPHO-S. All rights reserved.

注意：L的定义为，在等压而非等容环境下单位物质的量的液体蒸发为同等温度的气体所吸收的热，也就是说，除了两相内能的变化，L也包含了体系膨胀克服外压所做的功。

如果题目说明需要代入数据，请采用以下数据，最终答案请保留三位有效数字：

$$T_0 = 373\ \mathrm{K}, p_0 = 1\ \mathrm{atm} = 101325\ \mathrm{Pa}, L_0 = 40.7\ \mathrm{kJ/mol},$$
$$\rho = 1\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}, c = 4.2\times10^3\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}, \mu N_A = 18.0\times10^{-3}\ \mathrm{kg},$$
$$S_l = 80\%, T = \tau = 300\ \mathrm{K}, T_1 = 383\ \mathrm{K}$$

（1）饱和蒸汽压与相平衡

作为你无需证明的背景知识，摩尔相变潜热随着温度的变化率与其他参数的关系为：

$$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{相平衡}} = 4R - c\mu N_A \tag{7.1}$$

当然，只要提及气体与液体的相平衡，就很难不考虑克拉珀龙方程。我们直接给出，克拉珀龙方程在本题的近似下有如下形式：

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{相平衡}} = \frac{L}{T\Delta V} = \frac{Lp_s}{RT^2} \tag{7.2}$$

请根据如上微分方程，求出$L(T)$与$p_s(T)$关于T的函数关系。

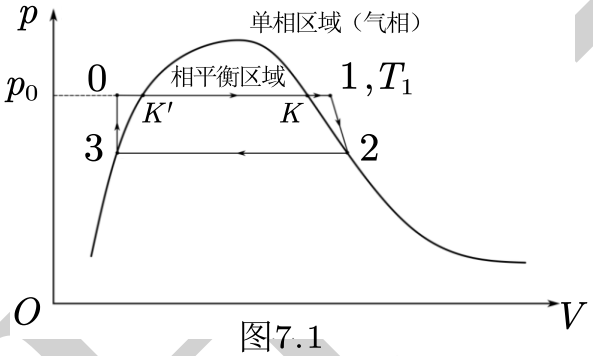


图7.1

（2）近平衡状态的循环

作为对非平衡蒸发问题的模型的简化，我们先讨论一个近平衡态循环。

我们考虑的循环是1 mol物质的朗肯循环的简化版本，如图7.1所示：其中$1\to2, 3\to0$为绝热过程，$0\to1, 2\to3$为等压过程。忽略液体体积（图中做了夸张），认为过程$3\to0$当中近似温度不变，而过程$0\to K'$当中，液体的温度变化不可忽略。利用题给数据，计算该循环的循环效率η。

【注意：请将本题第（3）小问写在第八页答题卡上】

（3）非平衡热力学问题

从热力学平衡条件出发可知，在完全平衡状态下，单位时间从液体逸出到气体的分子数和单位时间从气体返回液体的分子数相同，单位时间内气体与液体因为传输这些分子而造成的能量变化也相同。以下题目的答案均应该表达为液体的热力学温度T，周围环境的相对湿度S_l与周围环境的热力学温度τ等物理量的函数。你可以使用$p_s(T)$与$p_s(\tau)$来简化你的表达式，相对湿度定义为蒸汽的分压与其同温度下的饱和蒸汽压的比值。在之后的问题中，忽略空气与水的热传导，并认为气相是纯的水蒸气气体。

已知在单位时间内通过装有理想气体的容器壁上开有的单位面积的小孔的气体分子数

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t\mathrm{d}S} = \frac{1}{4}\bar{v}\cdot\left(\frac{n}{V}\right) \tag{7.3}$$

其中$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}$为气体的平均速率。

By CPHO-S. All rights reserved.

这部分气体分子相较容器中处于平衡态的气体而言，有额外的平均动能$\frac{1}{2}kT$。

（3.1）将液体池放置在通风良好的环境中，从而使得外界温度与相对湿度不会因为液体的蒸发发生变化。假设所有碰撞液体表面的分子均被液体吸收，且液体分子蒸发进入气体的速率仅与液体本身状态有关，计算液体深度变化率$\dot{h}$，并计算相应的值。

一般而言，液体蒸发会导致降温，我们可以通过热力学平衡态来得出单位时间的散热率。本问中，我们将通过逐步求解平衡液体的温度。仍然认为液体池处在的环境有足够好的通风条件，且与外界无热量交换。

（3.2.1）假设温度T下每摩尔气体分子比同温度下液体分子内能高$U_0(T)$。为了确定U_0的数值，我们考虑液体蒸发的过程中的吸放热和做功关系。请求出$U_0(T)$的表达式，用$L(T), T, R$表示。

在下面的小问中，为了简单化体系的处理，我们考虑这样的一个封闭的物质系统K：某时刻t在液体中且在下一相邻时刻$t+\mathrm{d}t$时也不会离开液体的所有分子，该部分分子将会感受到如下的吸放热：

（3.2.2）从气体进入液体中的分子与液体中的分子达成热平衡，试求每摩尔这样进入液体的分子导致的吸热q_1，用$L(T), \tau, T, R$表示。

（3.2.3）对于从液体逸出的分子，其通过随机的碰撞，获取了高于平均动能的能量，并最终得以逸出液体。这一过程将从K系统吸收热量Q_2，试求每摩尔这样逸出液体的分子导致的放热q_2，用$L(T), T, R$表示。

（3.2.4）以上两部分导致的吸放热相等时，体系才能够保持温度不变。请列出这一条件对应的方程，使用题给τ计算平衡液体温度T'及此时液面高度的下降速度。

解：（1）饱和蒸汽压与相平衡

将相变潜热的变化方程积分，得到：

$$L = L_0 + (4R - c\mu N_A)\cdot(T - T_0) \tag{1}$$

代入克拉珀龙方程式，整理得到：

$$R\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{L_0 + (4R - c\mu N_A)\cdot(T - T_0)}{T^2}\mathrm{d}T \tag{2}$$

两边积分，整理得到：

$$p = p_0 \exp\left[\frac{L_0 - 4RT_0 + c\mu N_A T_0}{R}\cdot\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) + \left(4 - \frac{N_A c\mu}{R}\right)\cdot\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right] \tag{3}$$

（2）近平衡状态的循环

我们将从K'点出发，绕一圈来考虑所有过程的吸放热。

$K' \to K$：

这个过程事实上是p_0, T_0状态下水的蒸发，所以根据相变潜热的定义，其吸热为：

$$\Delta Q_{K'K} = L(T_0) = L_0 = 40700\ \mathrm{J} \tag{4}$$

$K \to 1$：

这个过程是水蒸气气体的等压升温过程：

$$\Delta Q_{K1} = c_p(T_1 - T_0) = 4R(T_1 - T_0) = 333\ \mathrm{J} \tag{5}$$

$1 \to 2$：

这个过程是一个绝热过程，直接引用绝热方程：

$$pV^\gamma = \mathrm{Const.} \tag{6}$$

其中：

$$\gamma = \frac{c_v + R}{c_v} = \frac{4}{3} \tag{7}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

并将其与状态2所满足的（3）方程联立，解得：

$$T_2 = 368.7K \tag{8}$$

这个过程绝热，所以其吸放热为0。

$2 \to 3$：

这个过程是T_2下的水凝结，所以根据相变潜热的定义，其放热就是：

$$-\Delta Q_{23} = L(T_2) = [L_0 + (4R - c\mu N_A) \cdot (T_2 - T_0)] = 40882\ \mathrm{J} \tag{9}$$

$3 \to 0$：

由题目提示，这个过程没有事情发生。

$0 \to K'$：

由题目提示，这个过程是水由T_2向T_0的升温过程，所以吸热为：

$$\Delta Q_{0K'} = N_A c\mu (T_0 - T_2) = 325\ \mathrm{J} \tag{10}$$

整个过程已经分析完毕，其效率由定义式即为：

$$\eta = 1 - \frac{-\Delta Q_{23}}{\Delta Q_{K'K} + \Delta Q_{K1} + \Delta Q_{0K'}} = 1.15\% \tag{11}$$

（3）非平衡热力学问题

（3.1）我们假设一个热平衡在T与$p_s(T)$的体系，考察单位时间气体分子进入液体的数目，它事实上就是任意情况下液体分子反向进入气体的数目，无论外部气体是什么情况：

$$n_{pass} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \cdot \frac{n}{V} \cdot S \tag{12}$$

代入理想气体状态方程：

$$p_s V = nRT \tag{13}$$

换掉式子中的$\frac{n}{V}$，得到平衡状态外面进入的分子数，也就是任意状态内部出去的分子数：

$$n_{pass} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(T)}{RT} \cdot S \tag{14}$$

于是，因为现在外面的温度不是T而是τ，并且相对湿度也不是100%而是S_l，于是我们可以写出，外面进入的分子数：

$$n'_{pass} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{8k\tau}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(\tau)}{R\tau} \cdot S \cdot S_l \tag{15}$$

将它们相减，就得到了单位时间液体当中的摩尔数的净减少率：

$$n_{pure} = n_{pass} - n'_{pass} = \frac{1}{4} S \cdot \left[\sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(T)}{RT} - \sqrt{\frac{8k\tau}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(\tau)}{R\tau} \cdot S_l \right] \tag{16}$$

并且，我们可以相应的通过液体高度变化率直接写出相同的减少率：

$$n_{pure} = \frac{1}{\mu N_A} \cdot \rho S \left| \dot{h} \right| \tag{17}$$

联立（16）与（17），得到：

$$\dot{h} = -\frac{N_A \mu}{4\rho} \cdot \left[\sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(T)}{RT} - \sqrt{\frac{8k\tau}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(\tau)}{R\tau} \cdot S_l \right] \tag{18}$$

直接向#18 中代入数据：

$$\dot{h} = -7.82 \times 10^{-4}\ \mathrm{m/s} \tag{19}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

（3.2.1）我们考虑$\mathrm{d}n$的分子从液体逸出到达气体的情景。此时，显然逃出势阱需要先贡献一个$U_0\mathrm{d}n$的能量，而在逸出以后，因为要保持等压而不是等容，所以还将导致一个体积变化，向外再推一些，这一做功将会导致需要再吸热一些。而这个吸热可以写为：

$$đQ_{ex} = p\mathrm{d}V = RT\mathrm{d}n \tag{20}$$

于是，我们根据相变潜热的定义列出：

$$L\mathrm{d}n = U_0\mathrm{d}n + đQ_{ex} \tag{21}$$

于是：

$$U_0 = L - RT \tag{22}$$

（3.2.2）本问当中，我们将给出两种等价的方法，答案相同，且都可以得分。

##方法 1

我们分析进入的分子，它们在气体当中马上要进入液体的瞬间时垂直方向的平均摩尔动能从$\frac{1}{2}R\tau$增加到了$R\tau$，所以总动能便从$3R\tau$增加到了：

$$E_{kes} = \frac{7}{2}R\tau \tag{23a}$$

以下讨论当中，我们将以液体当中为内能差（“势能”）零点。这意味着，在气体部分，分子均有着U_0的摩尔势能。这一部分势能将会进一步将分子加速，所以在液体当中，这部分分子的平均动能为：

$$E_{kms} = E_{kes} + U_0(T) = L(T) + \frac{7}{2}R\tau - RT \tag{24a}$$

而其末态动能需要变为：

$$E_{end} = 3RT \tag{25a}$$

所以这一过程释放的摩尔热为：

$$q_1 = E_{kms} - E_{end} = L(T) + \frac{7}{2}R\tau - 4RT \tag{26a}$$

##方法 2

我们为液体和气体各定义一个摩尔内能U_l, U_g，这样，我们就可以根据其热容分别写出U_l, U_g：

$$U_l(T) = c\mu N_A T \tag{23b}$$

$$U_g(T) = U_0(0) + 3RT \tag{24b}$$

其中$U_0(0)$的意义显然就是温度外延为0时的摩尔内能差，也就是此时的U_0函数。

然而，此时外面气体的温度不是T而是τ，并且它们还额外多了一个$\frac{1}{2}R\tau$的动能，所以此时其内能将会变为：

$$U_g'(\tau) = U_0(0) + \frac{7}{2}R\tau \tag{25b}$$

将它们作差，并将$U_0(0)$代入，就可以得出：

$$q_1 = U_g'(\tau) - U_l(T) = L(T) + \frac{7}{2}R\tau - 4RT \tag{26b}$$

（3.2.3）观察上问当中进入液体的气体的平均能量（24），显而易见的，由体系的热平衡特性，如果液体与气体达成完全的热力学平衡，此时有$T = \tau$，那么也就有液体平均将要逸出的分子的能量为（24a）式。为了适用于现在的情况，将其中τ换为T即可。

$$E_{kms}' = L(T) + \frac{5}{2}RT \tag{27}$$

而其初态动能（还未接受碰撞时）为：

$$E_{init} = 3RT \tag{28}$$

By CPHO-S. All rights reserved.

于是吸热：

$$q_2 = E'_{kms} - E_{init} = L(T) - \frac{1}{2}RT \tag{29}$$

（3.2.4）温度不变方程可以列为：

$$q_1 n'_{pass} = q_2 n_{pass} \tag{30}$$

即：

$$\left[L_0 + (4R - N_A c\mu)(T - T_0) + \frac{7}{2}RT - 4RT\right]\sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(T)}{RT}$$

$$= \left[L_0 + (4R - N_A c\mu)(T - T_0) + \frac{7}{2}R\tau - 4RT\right]\sqrt{\frac{8k\tau}{\pi\mu}} \cdot \frac{p_s(\tau)}{R\tau} \cdot S_l \tag{31}$$

本问当中，需要先解（31）方程。这个方程比较友好的处理方法应该是先将（对T而言）的常数求出，并适当设定暂时变量，然后求解方程。

可以解出（本题目中T'的精度对答案的影响很大，故在此多留位数）：

$$T' = 296.17830\ \mathrm{K} \tag{32}$$

于是，此时就可以直接代入（18）式，得到：

$$\dot{h} = -8.15 \times 10^{-6}\ \mathrm{m/s} \tag{33}$$

评分标准：本题满分 80 分。

第（1）问 10 分：（1）式 4 分，（3）式 6 分；

第（2）问 30 分：（4）（5）（8）（9）（10）式各 4 分，有关于$3-0$过程无吸放热的讨论 4 分，（11）式 6 分；

第（3）问 40 分：

第（3.1）小问 15 分：（13）（14）（15）式各 1 分，（16）（17）（18）（19）式各 3 分；

第（3.2）小问 25 分：

第（3.2.1）问题 5 分：（20）式 1 分，（21）（22）式各 2 分；

第（3.2.2）问题 5 分：两种可能的方法均（23）（24）（25）式各 1 分，（26）式 2 分；

第（3.2.3）问题 5 分：（27）式 2 分，（28）式 1 分，（29）式 2 分；

第（3.2.4）问题 10 分：（30）式 1 分，（31）式 4 分，（32）式 2 分，（33）式 3 分。